

# Vista jerárquica de expresiones matemáticas para facilitar la comprensión sintáctica

Silvia Fajardo, María Andrade y Edson Rodríguez

## Resumen

*En este artículo presentamos una interfaz que implementa algunas funciones de apoyo en la comprensión de la sintaxis de expresiones matemáticas. En nuestra propuesta, dicho apoyo se ofrece con vistas alternativas de la expresión, específicamente resaltando su estructura jerárquica y ofreciendo pistas visuales para atraer la atención a términos específicos. El diseño de las funciones se hizo tomando en cuenta aspectos visuales y no visuales, con el fin de que sean accesibles tanto a personas con vista normal o corregida, y a personas con discapacidad visual. Las funciones implementadas fueron evaluadas por estudiantes con vista normal durante el proceso de resolución de ecuaciones algebraicas, y los resultados fueron comparados con un grupo de control que no utilizó ayudas visuales. Los resultados sugieren que las pistas visuales implementadas en la interfaz tuvieron un impacto positivo durante el proceso de resolución, y contribuyeron a la obtención de respuestas correctas.*

## Palabras claves

Diseño de interacción; acceso a matemáticas; diseño accesible.

# 1. Introducción

Las matemáticas son consideradas como una materia difícil aún desde los niveles de educación básica. Conforme el nivel de dificultad aumenta, aumenta también la frustración de los estudiantes, quienes luchan para comprender nuevos conceptos o bien para pasar de conceptos aritméticos a algebraicos. Se cree que el conocimiento previo que se tiene sobre el esquema operacional aprendido a nivel primaria afecta el desempeño del estudiante en niveles superiores de matemáticas [4]. Por ejemplo, una operación del tipo  $a = b$ , para la cual los estudiantes aprenden que se espera un valor, puede limitar el aprendizaje del esquema relacional que trata al signo de igualdad como una indicación de que las dos partes de la ecuación tienen el mismo valor.

Este conocimiento previo del esquema operacional puede causar dificultades al resolver ecuaciones que involucran operaciones en ambos lados de la ecuación [4]. Otros problemas típicos son: dificultad para reconocer ecuaciones equivalentes, para reconocer la jerarquía de operaciones [10], y una amplia gama de dificultades para aplicar transformaciones a las ecuaciones [3].

Según [1, 8], la habilidad para comprender la estructura sintáctica de ecuaciones algebraicas es de vital importancia para tener éxito en el aprendizaje de álgebra. Una estrategia eficiente para resolver una ecuación sólo puede ser posible una vez que se haya hecho un análisis sintáctico completo. Existe evidencia de que las personas con experiencia en matemáticas codifican internamente las expresiones algebraicas utilizando una representación basada en la sintaxis matemática [7, 12]. Asimismo, existe evidencia de que el cerebro humano puede extraer de un vistazo la estructura jerárquica de una expresión [13].

El reconocimiento de la estructura de una expresión algebraica empie-



za por una inspección, la cual puede ser visual o no visual, dependiendo de las capacidades perceptuales de la persona que la realiza. Según [9], los estudiantes que empiezan a aprender álgebra aprovechan las ventajas de las características visuales de los símbolos. En ocasiones los estudiantes cometen errores que no están necesariamente asociados con la falta de comprensión de las reglas de transformación, sino con la percepción errónea de la estructura de la ecuación.

Los resultados del estudio realizado por [11] sugieren que las pistas visuales se pueden utilizar para redirigir la atención del estudiante a las partes relevantes del problema, y potencialmente pueden influir la manera en que éste razona. En su experimento sobre la resolución de un problema de física utilizando diagramas, observaron que los participantes del grupo que tuvo pistas visuales tuvieron más respuestas correctas que los participantes del grupo sin pistas visuales. Los participantes que contestaron correctamente el problema utilizando las pistas visuales dirigieron su atención hacia las partes relevantes del diagrama, lo cual a su vez produjo un mayor número de soluciones correctas. En otro experimento con y sin pistas visuales [6] se encontró que el razonamiento puede ser mejorado utilizando propiedades perceptuales controladas para guiar la atención del estudiante.

En resumen, para que un estudiante pueda planear una estrategia de solución debe interpretar correctamente la estructura de una ecuación, y existe evidencia de que la estructura sintáctica está codificada como un árbol jerárquico en el cerebro de una persona con experiencia en matemáticas. Tomando en cuenta dichas evidencias, proponemos que un soporte adecuado que facilite el análisis de la jerarquía de una expresión matemática podría ayudar a reforzar la adquisición de su estructura, lo cual podría a su vez contribuir a la planeación de una estrategia adecuada de solu-

ción. Por lo anterior hemos desarrollado una interfaz que integra funciones de apoyo a la visualización. En nuestra propuesta, dicho apoyo consiste en vistas alternativas de la expresión, resaltando su estructura jerárquica y ofreciendo pistas visuales para dirigir la atención a términos específicos. Nuestra interfaz permite la visualización y navegación de una ecuación, y las pistas visuales se muestran sobre demanda del usuario.

Este estudio fue motivado a partir de un desarrollo anterior de un editor accesible de álgebra, cuyo objetivo es ofrecer una interfaz común para que personas con y sin discapacidad visual trabajen con ecuaciones matemáticas. Dicho editor de álgebra incluye algunas funciones auxiliares para facilitar la visualización a personas ciegas, cuyo método de acceso a la lectura de ecuaciones (braille o audio) es lineal y requieren soportes alternativos para que puedan trabajar a un ritmo más o menos similar que sus compañeros o maestros sin discapacidad visual [5].

Sin embargo, después de observar las dificultades de los estudiantes ciegos y considerando la importancia de la comprensión sintáctica, se sugirió que las personas sin discapacidad visual también podrían apoyarse con pistas visuales para facilitar la comprensión de la estructura sintáctica de expresiones matemáticas. En este artículo presentamos la implementación de dicho soporte en una interfaz, así como la evaluación de la interfaz con usuarios sin discapacidad visual.

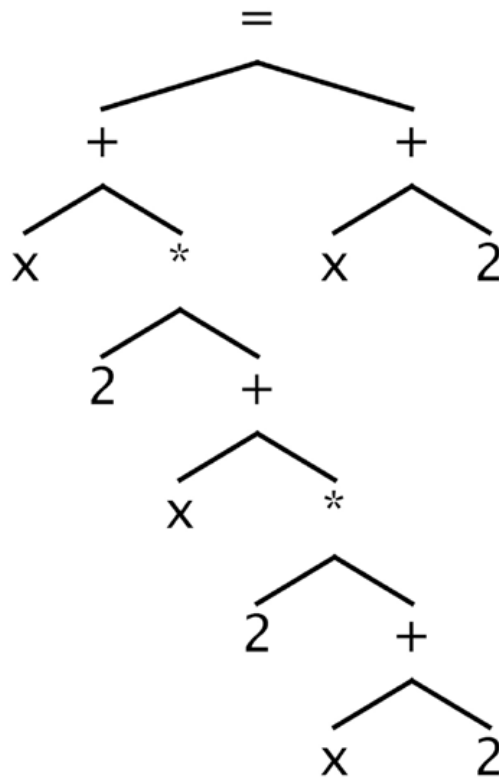
## 2. Funciones de Navegación y Visualización

Las funciones aquí propuestas fueron planeadas tomando en cuenta el acceso visual y no visual. Como consecuencia, algunas de las funciones parecen no ser muy relevantes para el estudiante sin discapacidad visual, pero podrían representar una gran diferencia para el estudiante con ceguera. Utilizaremos la siguiente función para ilustrar las funciones:



$$x + 2(x + 2(x + 2)) = x + 2$$

La expresión aparece en [3], en cuyo estudio se reporta que causó confusión en el proceso de resolución. El árbol sintáctico de la ecuación se muestra en la figura 1.



**Figura 1.** Árbol sintáctico de la expresión

Las funciones se describen a continuación:

*Navegación por los nodos del árbol jerárquico de la expresión.*

Esta opción permite a los usuarios a atravesar la ecuación como si fuera un árbol, es decir, de acuerdo a su estructura jerárquica. En otras palabras, la expresión es navegada nodo por nodo, y no carácter por carácter como los editores de texto comunes. Al navegar la ecuación con la flecha derecha, el usuario vería resaltados los nodos siguientes (uno a la vez):

$$x \rightarrow + \rightarrow 2(x+2(x+2))\dots$$

Obsérvese que después del operador “+”, la interface resaltará el factor completo, implicando que el número 2 no está solo, sino que pertenece a una sub-expresión y por lo tanto a un nivel más profundo en la jerarquía. De hecho, un error común de los estudiantes resolviendo esta ecuación (reportado en [3]) fue el de eliminar el más externo de ambos lados de la ecuación, sin darse cuenta de que el número 2 estaba multiplicando otro grupo de términos. Continuando con la navegación, la interfaz resaltará los términos o sub-expresiones dentro del factor actual, de acuerdo a su nivel jerárquico, y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} &\rightarrow 2 \rightarrow (x + 2(x + 2)) \dots \\ &\rightarrow ( \rightarrow x \rightarrow + \rightarrow 2(x + 2) \dots \\ &\quad \rightarrow 2 \rightarrow (x + 2) \dots \\ &\rightarrow ( \rightarrow x \rightarrow + \rightarrow 2 \rightarrow ) \rightarrow ) \rightarrow = \rightarrow x \rightarrow + \rightarrow 2 \end{aligned}$$

*Resaltar el nivel más profundo en la jerarquía.* Esta opción permite al estudiante fijar su atención en el nivel más profundo del árbol jerárquico, es decir, la estructura más anidada de la ecuación. Permite también una alternativa de navegación: en lugar de empezar del inicio de la expresión y avanzar de izquierda a derecha, esta opción resaltaría el nodo inicial para una navegación bottom-up. En el ejemplo en cuestión, la estructura más anidada es  $(x+2)$ .

*Resaltar el nivel más alto en la jerarquía.* Esta opción resaltará la ecuación completa, es decir, el nodo superior. Este nodo es el punto



de partida para una navegación top-down, así como el nodo final en una navegación bottom-up.

*Resaltar un nivel arriba del nodo actual.* Esta opción permite navegar del nodo actual hacia el nodo del siguiente nivel hacia arriba en la jerarquía. Continuando con el ejemplo, si estamos ubicados en el nivel más profundo  $(x+2)$ , esta función resaltaría  $2(x+2)$ , y así sucesivamente hacia arriba. Para los usuarios con discapacidad visual, el hecho de poder avanzar por nivel de jerarquía significa tener una idea del nivel de anidamiento que tiene la ecuación, lo cual puede indicar el nivel de complejidad, que para las personas sin discapacidad visual es evidente a simple vista. Por otro lado, tanto los usuarios con y sin vista pueden utilizar esta opción para observar la relación entre términos y sub-expresiones. En la expresión de ejemplo, permite observar que la primera operación a ejecutar con esa sub-expresión es la distribución de  $2(x+2)$ .

*Resaltar un nivel abajo del nodo actual.* De manera similar que la opción anterior, esta opción permite navegar a partir del nodo actual hacia el siguiente nivel hacia abajo en la jerarquía. Por ejemplo, si el nodo actual es , una secuencia de acciones de navegación hacia abajo resaltaría respectivamente:

$$(x + 2(x + 2))$$

$$2(x + 2)$$

$$(x + 2)$$

*Resaltar los operadores explícitos.* Los operadores explícitos son los que están visibles en la expresión, por ejemplo: + - \* / ( ). Los operadores explícitos como el símbolo “\*” que se sobreentiende en la sub-expresión  $2(x+2)$  no son considerados en esta visualización.

*Resaltar los exponentes de la ecuación.* Esta opción resaltará todos los exponentes que se encuentran en la ecuación. Este es otro ejemplo de función que puede favorecer a los usuarios con discapacidad visual, ya que pueden observar otro aspecto de la complejidad de la ecuación al observar el máximo exponente.

*Resaltar los denominadores.* En cualquier operación con fracciones primeramente se observan los denominadores. Para las personas sin discapacidad visual, la observación de denominadores es sumamente sencilla, ya que la misma naturaleza bidimensional de la notación matemática que conocemos lo hace evidente de forma inmediata. Sin embargo para las personas ciegas esta tarea no es tan simple porque la notación matemática no visual es lineal, por lo que para ellos esta opción puede proporcionar una visualización más inmediata. Para ejemplificar la diferencia en el acceso a las representaciones lineal y bidimensional, consideremos la ecuación siguiente:  $\frac{2}{7}=y+\frac{2}{3}$ , en la cual la visualización de los denominadores no es tan directa como en la representación:

$$\frac{2}{7} = y + \frac{2}{3}$$

*Búsqueda de términos comunes.* Esta función toma un término escrito como criterio de búsqueda, y resalta todos los términos comunes encontrados en la ecuación. El término de búsqueda es escrito de manera lineal, utilizando un circunflejo para indicar una potencia. Esta es una de





las funciones que pueden apoyar tanto a personas con y sin discapacidad visual, no sólo para encontrar los términos comunes, sino para facilitar su visualización y asegurarse de que ninguno ha quedado sin tratar durante una simplificación.

*Búsqueda libre.* Este es un tipo de búsqueda similar a las que se pueden encontrar en los editores de texto. Permite a los usuarios buscar términos específicos, operadores o fragmentos de la ecuación aunque no sean correctamente sintácticos o que no pertenezcan al mismo nivel jerárquico. En la ecuación de ejemplo, si el usuario busca “2(”, la interfaz encontrará y resaltará 2 ocurrencias.

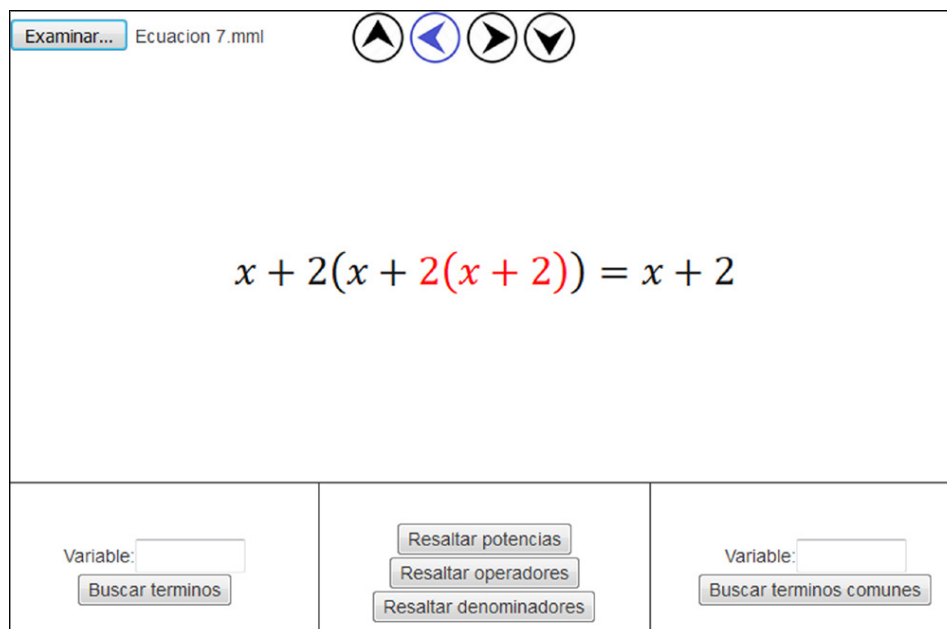
Todas las funciones descritas anteriormente permiten la mejor visualización de ciertos términos a demanda del usuario, pero es importante mencionar que la interfaz no indica qué hacer con ellos. Por ejemplo, durante la simplificación de la expresión siguiente:

$$4x^3 + 6x^2 - 3x + 4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 10$$

El usuario puede decidir hacer una búsqueda de términos comunes en , pero una vez resaltados es el usuario quien debe decidir qué hacer con los términos resaltados; en este caso, debe saber que los términos se suman, mientras que una búsqueda de en la expresión arrojará resultados que no requieren el mismo tratamiento que en el ejemplo anterior.

### 3. La Interfaz

Las ecuaciones se representaron en MathML de Presentación. Se utilizó JavaScript para manipular el DOM de las ecuaciones, HTML para el diseño de interfaz, y Bootstrap 3.1.2 como framework de desarrollo. La interfaz se muestra en la figura 2.



**Figura 2.** Resultado de localizar el nodo de nivel más profundo, seguido por la navegación hacia un nivel arriba.

Las opciones se presentan en un menú con las funciones para resaltar los términos y los tipos de búsqueda disponibles. La navegación jerárquica se realiza con las flechas derecha e izquierda, y las funciones para resaltar el nivel más profundo, el nivel hacia arriba y el nivel hacia abajo se realizan con las teclas S, W, A, D, respectivamente. Los términos resaltados se muestran en color rojo al usuario. Es importante aclarar que para los propósitos de este estudio, la interfaz sólo permite la visualización de ecuaciones, no su edición. Las ecuaciones se abren desde la interfaz utilizando un cuadro de diálogo; estas ecuaciones fueron generadas con el editor de álgebra desarrollado por [5], el cual asegura que las ecuaciones estén en una forma canónica de MathML [2], una forma que no sólo es válida, sino que cumple con ciertas reglas de agrupamiento de términos en bloques necesaria para la navegación requerida, y para simplificar la conversión a braille matemático. La figura 3 ilustra las diferencias entre las representaciones de la expresión utilizando MathML y su forma canónica.



$(a + b)$	
Valid MathML	Canonical MathML
<code>&lt;mo&gt; ( &lt;/mo&gt;</code>	<code>&lt;mrow&gt;</code>
<code>&lt;mi&gt; a &lt;/mi&gt;</code>	<code>&lt;mo&gt; ( &lt;/mo&gt;</code>
<code>&lt;mo&gt; + &lt;/mo&gt;</code>	<code>&lt;mrow&gt;</code>
<code>&lt;mi&gt; b &lt;/mi&gt;</code>	<code>&lt;mi&gt; a &lt;/mi&gt;</code>
<code>&lt;mo&gt; ) &lt;/mo&gt;</code>	<code>&lt;mo&gt; + &lt;/mo&gt;</code>
	<code>&lt;mi&gt; b &lt;/mi&gt;</code>
	<code>&lt;/mrow&gt;</code>
	<code>&lt;mo&gt; ) &lt;/mo&gt;</code>
	<code>&lt;/mrow&gt;</code>

**Figura 3.** Comparación entre MathML válido y MathML canónico.

## 4. Evaluación

### 4.1 Participantes

Se seleccionaron 66 estudiantes de Ingeniería en Telemática con visión normal o corregida, y con conocimientos previos de álgebra. Los participantes fueron divididos en dos grupos, 36 en el grupo de control y 30 en el grupo experimental.

### 4.2 Objetivos del estudio

Se evaluaron las funciones implementadas en la interfaz con usuarios potenciales, con el propósito de:

- Comparar el número de respuestas correctas al resolver una serie de ecuaciones. Se esperaba obtener un porcentaje mayor de respuestas correctas en el grupo experimental.

- Recabar la opinión de los participantes sobre la utilidad de las funciones de visualización durante el proceso de resolución.
- Analizar la utilidad de la herramienta con respecto a las tareas de visualización para la resolución de ecuaciones.

### 4.3 Materiales

Se utilizó el navegador Mozilla Firefox, el cual incluye el render de MathML de forma nativa. Se preparó una lista impresa de las ecuaciones a resolver. Para cada ecuación se indicó brevemente la tarea a realizar, por ejemplo: “Encuentra el valor de  $x$  en la siguiente ecuación”, “Determina el valor o valores de  $x$ ”. Se utilizaron las siguientes ecuaciones, las cuales fueron propuestas por un profesor de matemáticas:

$$\text{Ec 1. } 4x - 2 = 2x + 7$$

$$\text{Ec 2. } (5x - 1)^2 - 3 = (5x - 6)^2 + 17$$

$$\text{Ec 3. } 7 - \frac{x+3}{x} = 5$$

$$\text{Ec 4. } \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Ec 5. } \frac{x+2}{x+7} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ec 6. } x^2 + x = 6$$

De manera adicional, se preparó un cuestionario para aplicar de manera posterior a la resolución de ecuaciones, con el fin de recolectar las opiniones de los participantes sobre el proceso de resolución con y sin las funciones, respectivamente. El cuestionario se presentó como una lista de afirmaciones, para la cual había 5 respuestas posibles según una escala de Likert, de Totalmente en desacuerdo a Totalmente de acuerdo. Algunos



ejemplos de afirmaciones para el grupo experimental fueron: “Me fue útil poder navegar en la ecuación”, “Me fue útil la función para resaltar exponentes”, “Me fue útil la búsqueda de términos comunes”. Algunas afirmaciones equivalentes para el grupo de control fueron: “Me fue fácil entender la ecuación”, “No tuve problemas para localizar todos los exponentes de la ecuación”, “Identifiqué los términos comunes sin confusión y sin que me faltara alguno”.

Es importante aclarar que las preguntas, a pesar de no ser las mismas para los dos grupos, se refieren a la misma tarea a realizar durante la resolución, sólo que las preguntas del grupo experimental son más específicas con respecto al uso de las funciones de la interfaz. En el análisis de los resultados no se hace una comparación directa entre las respuestas de los dos grupos, sino que se explican algunas tareas en las cuales el uso de las funciones de la interfaz podría hacer una diferencia.

#### **4.4 Protocolo**

El experimento se realizó en un laboratorio con 20 computadoras. Se instaló la interfaz y se dejó abierta en el browser, lista para su uso. Las ecuaciones en formato MathML se encontraban en archivos mml por separado, las cuales podían abrirse desde una caja de diálogo en la interfaz. Los participantes pasaron al laboratorio en grupos de 18, habiéndose especificado previamente cuáles formarían parte del grupo experimental y cuáles del grupo de control; es decir, un grupo completo era experimental o de control.

Un observador estuvo a cargo de dirigir el experimento. Primeramente, el observador explicó el funcionamiento de la interfaz a los participantes del grupo experimental, indicando cómo podrían usarse para apoyar la comprensión de las ecuaciones, o para buscar términos específicos. A los participantes del grupo de control no se les dio dicha explicación. Posteriormente se entregó la hoja de actividades a los participantes, a los cua-

les se les pidió que resolvieran lo indicado y escribir el procedimiento y las respuestas en una hoja aparte. A los participantes del grupo experimental se les animó a utilizar las funciones de visualización con el fin de dar una mayor retroalimentación, y los del grupo de control sólo observaron la ecuación sin utilizar las funciones. Una vez que resolvieron las ecuaciones, se pidió a los participantes que contestaran el cuestionario correspondiente a su grupo.

#### **4.5 Limitaciones**

La interfaz experimental actual permite la visualización pero no la edición de ecuaciones. Por lo anterior, los participantes del grupo experimental pudieron utilizar las funciones de visualización únicamente en la primera etapa de resolución, es decir, en la verificación de la ecuación en su estado inicial, pero no pudieron utilizar las funciones en las etapas posteriores del proceso, en las que en algunos casos la ecuación está más desarrollada (por ejemplo después de la distribución de la ecuación 2) y la utilidad de las funciones podría ser mejor apreciada.

## **5. Resultados y Discusión**

Primeramente se aplicó un análisis de normalización para determinar si los grupos con los que se llevó a cabo el experimento (control y experimental) cumplían con los criterios de homogeneidad, lo cual se hizo con el fin de verificar la normalidad de los datos, para que los resultados derivados del estudio sean estadísticamente confiables. Esto se hizo aplicando el test de normalidad de Anderson-Darling en el programa estadístico Minitab 14, para el grupo control se obtuvo: p-valor = 0,173, media = 34.25, DesvEst = 26.79, y para el grupo experimental: p-valor = 0,263, media = 33.3283, DesvEst = 25,47. Dado que en ambos casos, el valor de p en la prueba T-normalidad es mayor que 0,05, se verificó la homogeneidad interna en ambos grupos.



**Tabla 1.** Porcentaje de respuestas correctas por pregunta y por grupo.

Ecuación	Porcentaje de respuestas correctas	
	Grupo Control	Grupo Experimental
1	83.33	76.66
2	44.44	50
3	27.77	9.99
4	22.22	26.66
5	19.44	23.33
6	8.33	13.33

Los datos mostrados en la Tabla 1 sugieren la evidencia de la influencia positiva del uso de la interfaz, que se refleja en 4 de 6 valores para el grupo experimental. Sin embargo, consideramos pertinente obtener la evidencia estadística definitiva, la cual está dada por los resultados de la prueba de muestra-T de dos grupos, el de control contra el grupo experimental. En este caso, el valor  $p = 0,0352 < 0,05$  indica que la diferencia entre los grupos experimentales y de control es estadísticamente significativa, lo cual consideramos fue influenciado positivamente por el uso de pistas visuales en la interfaz (estimador de la diferencia = 0,9, T-valor=1.06). Este resultado fue el que se esperaba.

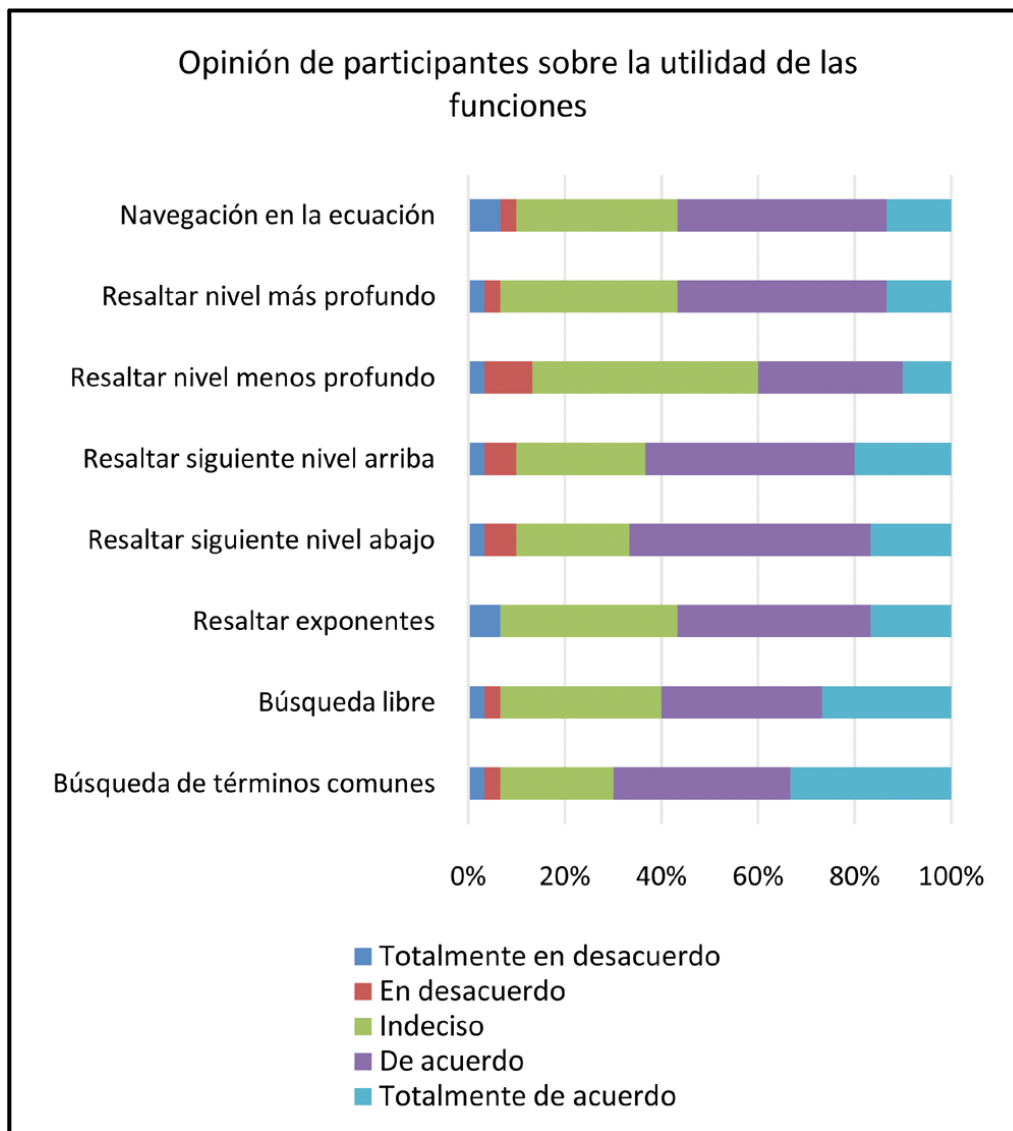
La opinión de los participantes del grupo experimental sobre la utilidad de las funciones de visualización, obtenida mediante el cuestionario, se ilustra en la Figura 4.

En cada uno de las afirmaciones incluidas se observa claramente la tendencia hacia los criterios “De acuerdo” y “Totalmente de acuerdo”, por lo que se aprecia una alta aceptación de la utilidad de las funciones implementadas en la interfaz.

Podemos observar que entre las funciones que se consideraron más útiles fueron la búsqueda de términos comunes y la de resaltar siguiente nivel arriba y abajo, respectivamente. Lo anterior tiene relación con acciones importantes que se hacen al resolver una ecuación, tanto para personas con y sin discapacidad visual, ya que la estrategia a seguir es independiente de la capacidad visual del que las ejecuta. Por otro lado, las funciones que tuvieron menos aceptación entre los participantes fueron las de resaltar el nivel menos profundo y el de resaltar exponentes. Dicho resultado es de esperarse entre participantes sin discapacidad visual, ya que se trata de acciones que puede realizar de manera rápida gracias al sentido de la vista.



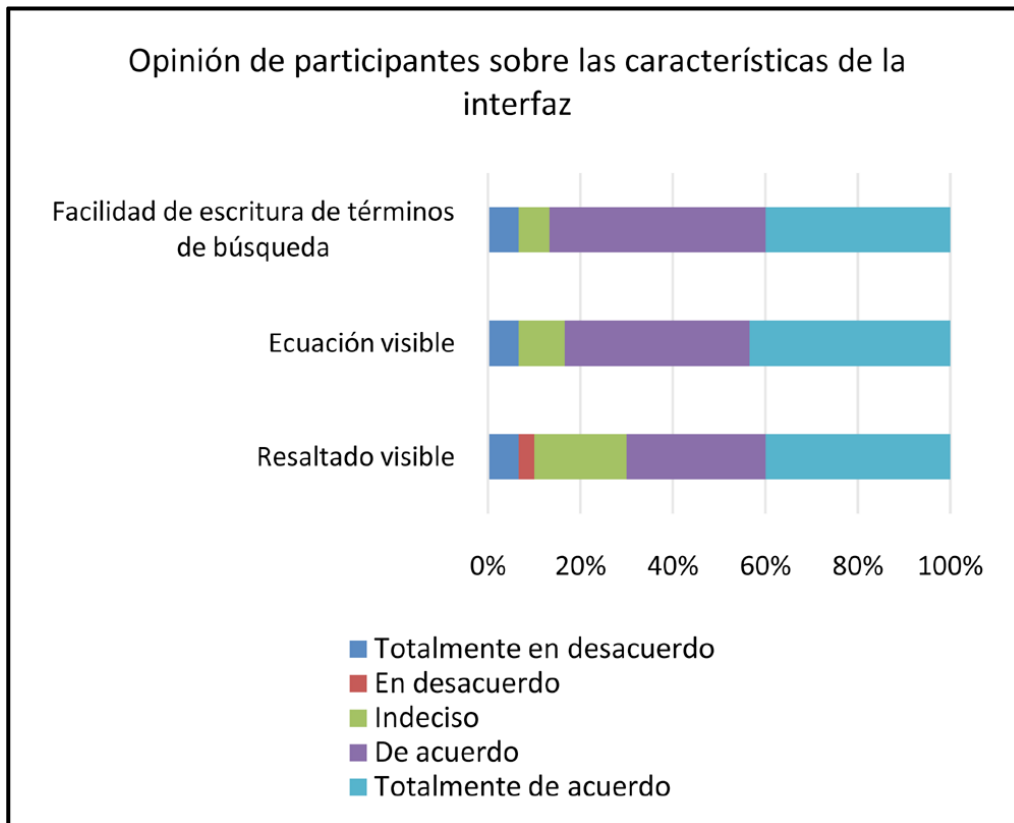




**Figura 4.** Resultados del cuestionario del grupo experimental con respecto a la utilidad de las funciones de la interfaz.

Además de la utilidad de las funciones, se consideró la opinión de los participantes con respecto a los aspectos de la visibilidad de la ecuación, del modo de resaltado utilizado en la interfaz, y de la facilidad de escribir los criterios de búsqueda. Los resultados se muestran en la Figura 5.

La mayoría de los participantes coincidieron en que tanto la visibilidad de la ecuación como la manera en que se indica el resaltado son aceptables. En cuanto a la facilidad para escribir los términos de búsqueda, en particular los exponentes, la mayoría de los participantes coincidieron en que la escritura era fácil.

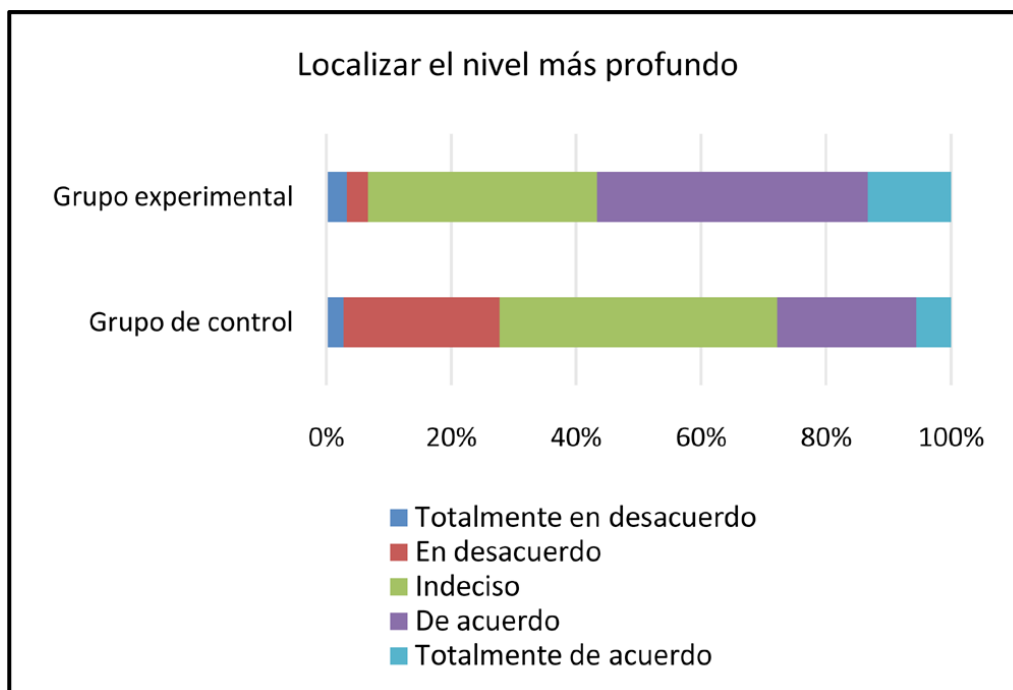


**Figura 5.** Resultados del cuestionario del grupo experimental sobre las características de la interfaz.

Del cuestionario que se aplicó de manera posterior a la resolución de ecuaciones pudimos obtener retroalimentación de los participantes de los grupos experimental y de control. Con respecto a la tarea de localizar el nivel más profundo de una ecuación, al grupo de control, que no utilizó las funciones de la interfaz, se le planteó el enunciado relacionado con la misma tarea: “Pude encontrar el nivel más profundo de la ecuación sin dificultad”. Esta afirmación no es igual a la presentada al grupo experimental, pero está relacionado con la misma tarea. La figura 6 ilustra las respuestas de ambos grupos.

Se puede observar que en el grupo control el mayor grupo de participantes optó por “Indeciso” con respecto a la dificultad de encontrar el nivel más profundo de la ecuación sin la ayuda visual. Este resultado podría sugerir que, sin pistas visuales, la localización de los términos más anida-



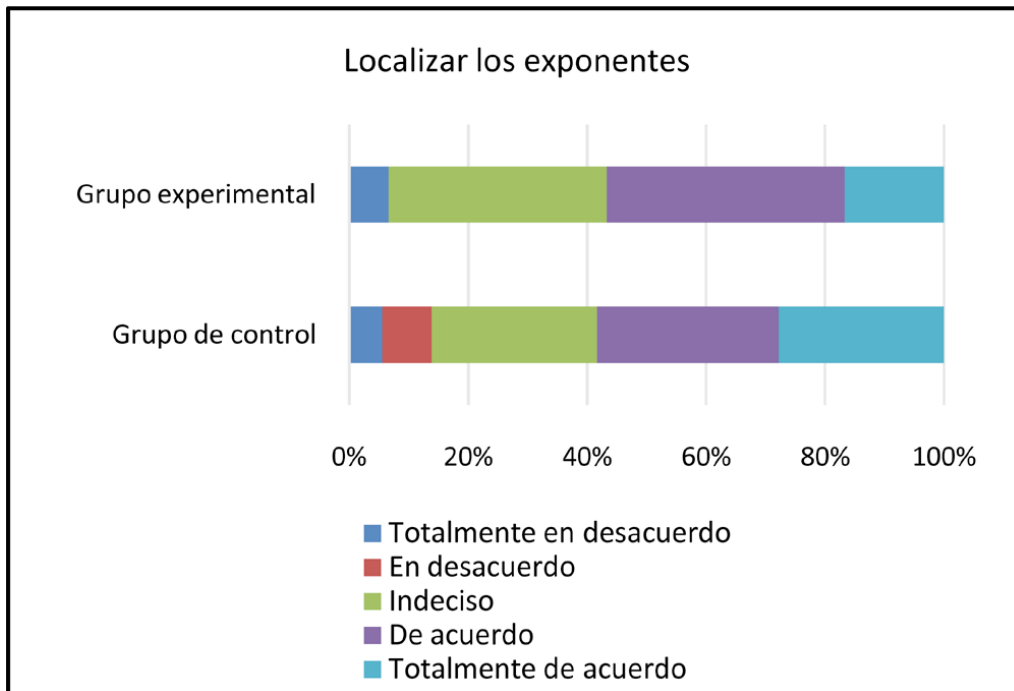


**Figura 6.** Resultados de los participantes de ambos grupos sobre la localización del nivel más profundo de la ecuación.

dos en una sub-expresión no siempre es sencillo. Si este fuera el caso, la función de visualización del nivel más profundo podría resultar útil, según las opiniones positivas del grupo experimental.

Con respecto a la tarea de localizar los exponentes de la ecuación, los resultados se ilustran en la Figura 7.

Como podemos observar, la mayor parte de los participantes del grupo experimental estuvo de acuerdo en que la función les fue útil; aun así hubo un número significativo de participantes que votó “Indeciso”. Como se ha mencionado con anterioridad, ésta es una de las funciones que podría ser más útil para los usuarios con discapacidad visual, pero no está claro si podría ser útil para los estudiantes con vista. Para el grupo de control, la afirmación relacionada con la misma tarea fue “No tuve problemas para localizar todos los exponentes de la ecuación”, cuyas respuestas están divididas también entre “De acuerdo”, “En desacuerdo” e “Indeciso”. En



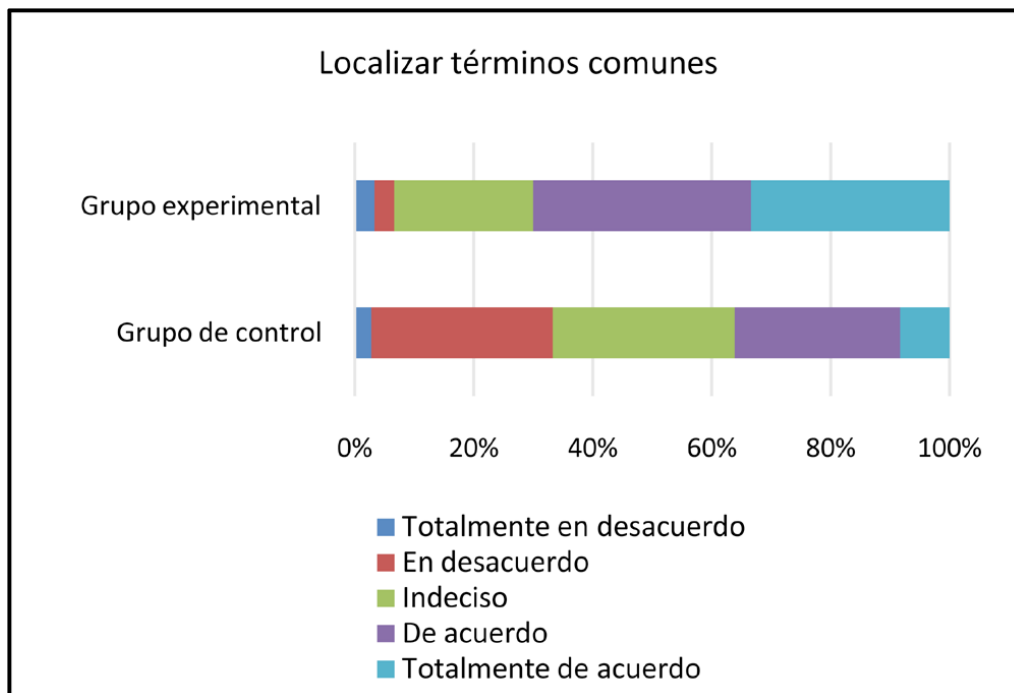
**Figura 7.** Resultados de los participantes de ambos grupos sobre la localización de exponentes.

otras palabras, la mayoría de los participantes de ambos grupos no tuvo dificultades para localizar exponentes, como era de esperarse para una tarea tan trivial para una persona con vista.

Con respecto a la tarea de localizar términos comunes, los resultados se muestran en la Figura 8.

Los participantes del grupo experimental están muy de acuerdo en que la función de búsqueda de términos comunes en la ecuación fue útil para la mayoría de los participantes. La afirmación para el grupo de control relacionada con la misma tarea fue “Identifiqué los términos comunes sin confusión y sin que me faltara alguno”. En este caso hubo un alto número de participantes del grupo de control que no estaban de acuerdo, en comparación con la facilidad de realizar las tareas anteriores. Estos resultados podrían indicar que la tarea de encontrar los términos comunes no es tan fácil para algunos, en cuyo caso la función de búsqueda de términos comunes podría utilizarse como apoyo.





**Figura 8.** Resultados de los participantes de ambos grupos sobre la localización de los términos comunes.

Podríamos resumir los resultados de la evaluación diciendo que de acuerdo con el número de respuestas correctas de cada grupo (Tabla 1), se sugiere que el uso de pistas visuales tuvo un impacto positivo en el proceso de resolución, lo que podría indicar que apoyó en la comprensión de la ecuación resuelta por los participantes. Por otra parte, teniendo en cuenta los comentarios de los participantes, no podemos concluir que todas las funciones fueron de ayuda real a las tareas, pero se puede observar que hay algunas actividades que provocan cierto grado de dificultad en la condición sin pistas visuales, para las cuales la herramienta podría ser útil. Sería necesario llevar a cabo una evaluación similar con participantes con discapacidad visual con el fin de comparar los resultados y tener una mejor perspectiva.

## 6. Conclusiones y Trabajo Futuro

Las matemáticas son consideradas como una materia difícil en casi todos los niveles, y para muchos es incluso un obstáculo para continuar con sus estudios. Apoyar la comprensión de las matemáticas es apoyar el mejoramiento del nivel educativo de los estudiantes. Aunque no es muy común utilizar las TIC's para enseñar matemáticas, el creciente uso de dispositivos móviles está causando un gran interés por el uso de plataformas digitales y formatos que soporten el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este estudio tomamos como base las dificultades de los estudiantes que comienzan a aprender álgebra para proponer algunas funciones de apoyo a la comprensión de ecuaciones matemáticas. Por otro lado, es importante expandir las posibilidades de acceso a la educación para personas con discapacidad visual que actualmente tienen limitaciones de acceso a contenidos matemáticos, así como para aquellos que estén interesados en cursar carreras de matemáticas u otras ciencias. Para realizar la propuesta aquí presentada se tomaron en cuenta las necesidades tanto de estudiantes con y sin discapacidad visual. Aunque la actual implementación sólo nos permitió observar el funcionamiento de nuestra interfaz con estudiantes sin discapacidad visual, obtuvimos información importante que nos permite continuar con este trabajo y extenderlo hacia el estudio con personas con discapacidad visual. Esperamos que en el futuro nuestro trabajo contribuya al mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas y a la promoción de la educación inclusiva.

## 7. Agradecimientos

Este proyecto fue posible gracias al financiamiento del Programa para el Desarrollo Profesional Docente (PRODEP/UCOL-EXB-177).



## 8. Referencias

- 1. Anderson, J.R.** 2005. Human symbol manipulation within an integrated cognitive architecture. *Cognitive science*. 29, 3 (2005), 313–341.
- 2. Archambault, D. y Moço, V.** 2006. Canonical MathML to Simplify Conversion of MathML to Braille Mathematical Notations. *Computers Helping People with Special Needs: 10th International Conference, ICCHP 2006*, Linz, Austria, July 11-13, 2006. Proceedings. K. Miesenberger, J. Klaus, W.L. Zagler, and A.I. Karshmer, eds. Springer Berlin Heidelberg. 1191–1198.
- 3. Carry, L., Lewis, C. y Bernard, J.** 1979. Psychology of Equation Solving: An Information Processing Study. Final Technical Report. (1979).
- 4. Chesney, D.L., McNeil, N.M., Brockmole, J.R. y Kelley, K.** 2013. An eye for relations: eye-tracking indicates long-term negative effects of operational thinking on understanding of math equivalence. *Memory & Cognition*. 41, 7 (Oct. 2013), 1079–1095.
- 5. Fajardo Flores, S. y Archambault, D.** 2014. Multimodal Interface for Working with Algebra: Interaction between the Sighted and the Non Sighted. *Computers Helping People with Special Needs: 14th International Conference, ICCHP 2014*, Paris, France, July 9-11, 2014, Proceedings, Part I. K. Miesenberger, D. Fels, D. Archambault, P. Peñáz, and W. Zagler, eds. Springer International Publishing. 606–613.
- 6. Grant, E.R. y Spivey, M.J.** 2003. Eye Movements and Problem Solving: Guiding Attention Guides Thought. *Psychological Science*. 14, 5 (Sep. 2003), 462–466.
- 7. Jansen, A.** 2002. Encoding and parsing of algebraic expressions by experienced users of mathematics. Monash University.

8. **Kirshner, D.** 1989. The Visual Syntax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20, 3 (1989), 274–287.
9. **Kirshner, D. y Awtry, T.** 2004. Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*. (2004), 224–257.
10. **Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A.** 1999. From numerical equivalence to algebraic equivalence. *Mathematics learning and teaching initiative (MALATI)*. (1999), 5–9.
11. **Madsen, A.M., Larson, A.M., Loschky, L.C. y Rebello, N.S.** 2012. Differences in visual attention between those who correctly and incorrectly answer physics problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*. 8, 1 (May 2012).
12. **Maruyama, M., Pallier, C., Jobert, A., Sigman, M. y Dehaene, S.** 2012. The cortical representation of simple mathematical expressions. *NeuroImage*. 61, 4 (2012), 1444–1460.
13. **Schneider, E., Maruyama, M., Dehaene, S. y Sigman, M.** 2012. Eye gaze reveals a fast, parallel extraction of the syntax of arithmetic formulas. *Cognition*. 125, 3 (Dec. 2012), 475–490.

## Sobre los Autores

**Silvia Fajardo Flores** es Ingeniera en Sistemas Computacionales por el Instituto Tecnológico de Colima, Maestra en Tecnologías de Información por la Universidad de Monash (Australia), y Doctora en Ciencias Computacionales por la Universidad Paris 8 Vincennes-Saint-Denis (Francia). Actualmente se desempeña como profesor-investigador de tiempo completo en la Facultad de Telemática de la Universidad de Colima. Sus intereses de investigación son el acceso no visual a la información, las interfaces multimodales y la tecnología educativa.





**María Andrade Aréchiga** es Licenciada en Matemática Educativa e ingeniera en Comunicaciones y Electrónica. Realizó sus estudios de Maestría en Educación con especialidad en Matemáticas en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y tiene el Doctorado en Ciencias de la Computación en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California. Sus intereses de investigación se enfocan a tecnología educativa, ambientes virtuales de aprendizaje y educación en matemáticas. Actualmente es profesora-investigadora de tiempo completo en la Facultad de Telemática de la Universidad de Colima.

**Edson Rodríguez Palos** es estudiante de 8° semestre de la carrera de Ingeniero de Software en la Facultad de Telemática, en la Universidad de Colima. Sus intereses son el desarrollo de aplicaciones de escritorio y web, y la seguridad informática.